



TITLE:

動物の運動と抵抗力推進 (流体方程式の特異性)

AUTHOR(S):

神部, 勉

CITATION:

神部, 勉. 動物の運動と抵抗力推進 (流体方程式の特異性). 数理解析研究所講究録 1977, 293: 67-78

ISSUE DATE:

1977-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106189>

RIGHT:

動物の運動と抵抗力推進

東大 宇航研 神部 勉

§ 1. はしがき

動物の運動の流体力学の際立った特徴は、外力ゼロの系であることである。流れ場に関して言えば、動物が体をくねらせてはいるが平均的に定常運動しているときに、動物を囲む閉曲面に関する momentum flux は平均的にゼロである。つまり単なる物体と異なり、体の運動によって推力を得てはいるが、^{その推力は}体にはたらく profile drag (粘性および圧力抵抗) とつり合って、合力は平均的にゼロになる。別の言い方をすると、運動する単なる物体には抵抗 (および揚力) がはたらくが、動物は体の運動によってその抵抗を減らし、ついにはゼロになったときに定常的推進運動が可能となり、更に推力がふたときに加速運動をすることになる。

動物の流体中推進法に2種を挙げることもできる: (1) 抵抗力 (resistive-force) 推進, (2) 反動力 (reactive-

force) 推進 [含む, 振動翼推進]。 (1) は流れの中の物体に作用する抵抗を利用する方法で, 細長い動物が体を横にうねらせる運動をするときに, 体の各部に作用する抵抗力の方向が, 必ずしも前進運動に抗する向きでなく, 局所的には前向きにもなることを利用する。 (2) の反動力推進は, 長い物体の近似 (elongated body approx.) が使えるばあい (2a) とか, 横に長く振動翼の取扱いができるばあい (2b) があり, いずれも vortex wake をつくり, 渦運動に附随した流体の運動量を後向きになるようにして, その反動の推力を得る。 (2a) は virtual mass 効果を主として利用し, (2b) は主として (準定常的な) 翼のまわりの循環に伴う揚力効果を利用するが, いずれも抵抗 force と違, 流体力学的効率が高くなる。 (2a) の代表者はウナギなど細長い魚などであり, (2b) の代表者は三ヶ付け形尾ビレを持った水棲動物 (マグロ, カツオ, イルカ, クジラ, ある種のサメ, カジキ等), 空飛ぶ鳥・昆虫類などである。

ここでは抵抗 force 推進の方に焦点を合わせる。対象となるのは, 鞭毛虫 ($R \sim 10^3$), 線虫 (nematode) ($R \sim 1$), ヒル ($R \sim 10^3$), 水中のヘビ ($R \sim 10^5$) などの細長い動物で, 体の長さ l と推進速度 U によ, レイノルズ数 $R = Ul/\nu$ を定義している。 R が広範囲にわたっているため, R の値に

よ、2抵抗法則にも違いがある。抵抗力 F は $R \lesssim 1$ のときは物体速度 V に比例するが (Stokes の抵抗), $R \gg 1$ のときは, $V^{1.5}$ (粘性抵抗, 層流) 又は V^2 (圧力抵抗ないし乱流) に比例することは知られている (図1)。

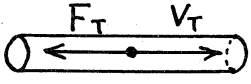
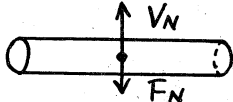
$R = Vd/\nu$			
(a)	$R \lesssim 1$	$K_T V_T$	$K_N V_N$
$R \gg 1$	(b) 層流	$\frac{1}{2} \rho \frac{A_T}{\sqrt{R}} V_T^2$	$\frac{1}{2} \rho \left\{ C_{Dp} + \frac{A_N}{\sqrt{R}} \right\} V_N^2$
	(c) 乱流	$\frac{1}{2} \rho C_f V_T^2$	$\frac{1}{2} \rho C_D V_N^2$

図1. 接線抵抗 F_T および法線抵抗 F_N の表式。 V は V_T 又は V_N をとる。 $K_T, K_N, A_T, A_N, C_{Dp}, C_f, C_D$ は定数係数。

§2. 低レイノルズ数での運動

小さい生物では, R が1ないしは1以下になり, 体の各部の抵抗力はその速度に比例する。図2のように長さ l の細長い体が有限振中のうねり運動を行い, その波形を体に相対的に後方へ位相速度 V で送る運動を行って, x の負方向に速度 U で前進しているとする。以下この節では Lighthill (1975a)⁽¹⁾ に従う。波は流体に対し $(V-U)$ で後方へ速み, 体自身は波に相対的にその接線方向に速さ c で移動する。ただし, $c = V/\alpha$, $\alpha = \frac{1}{l} \int_0^l \cos \theta \, ds$, 体線分 ds が x 軸に対し角度 θ をなすとする。

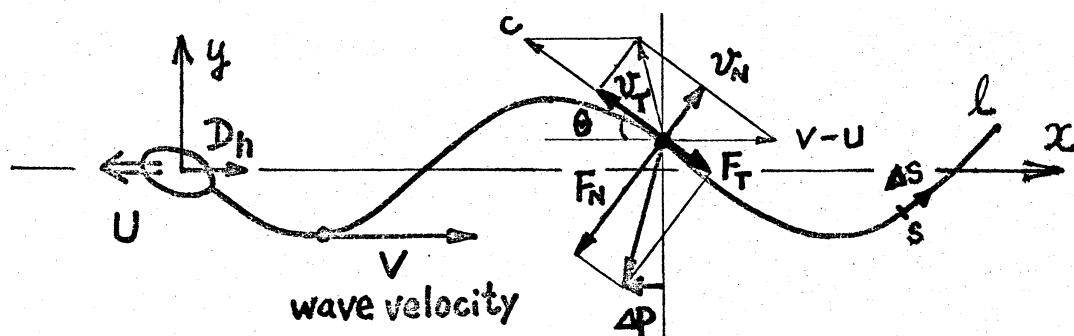


図 2.

る。図のように体線分が流体に対し接線速度 V_T 、法線速度 V_N をもつとすると、抵抗力は抗する方向に $F_T = K_T V_T$, $F_N = K_N V_N$ であり、局所推力（負 x 方向）は

$$dP = (K_N V_N \sin \theta - K_T V_T \cos \theta) ds$$

となるから、これを体全体について積分すると、全推力は

$$P = \int_0^l dP \\ = K_N l (V-U)(1-\beta) + K_T l \{(V-U)\beta - V\},$$

ここで $\beta = \frac{1}{l} \int_0^l \cos^2 \theta ds$ 。この生物が大きな頭部をもち、抵抗 D_h を受けているとすると、平均的定常運動の条件は、 $\bar{P} = D_h$ である。 \bar{P} は P の時間平均。隆びた頭部がないときには、 $D_h = 0$, つまり、 $\bar{P} = 0$ である。これより

$$\xi \equiv \frac{U}{V} = \frac{(1-\beta)(1-r_k)}{1-\beta + r_k \beta}, \quad r_k \equiv \frac{K_T}{K_N} \quad \dots ①$$

を得る。 $r_k \leq 1$ によつて、 $\xi \geq 0$ となる。他方、運動の効率率は

$$E = \int_0^l (K_N V_N^2 + K_T V_T^2) ds$$

$$= K_N l (V-U)^2 (1-\beta) + K_T l \{ (V-U)^2 \beta - 2(V-U) \alpha + \alpha^2 \}$$

体を伸ばして gliding しているときの抵抗を $D_0 (= K_T U l)$ とし、流体力学的推進効率 η を $D_0 U / E$ と定義すると、

$$\eta = \left[\frac{1}{r_k} \left(\frac{V}{U} - 1 \right)^2 (1-\beta) + \left\{ \left(\frac{V}{U} - 1 \right)^2 \beta - 2 \left(\frac{V}{U} - 1 \right) \frac{V}{U} + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{V}{U} \right)^2 \right\} \right]^{-1} \dots \textcircled{2}$$

を得る。体のうねり波形をいろいろに変えたときの最大値 η_m は $(1-\sqrt{r_k})^2$ であり、このとき $\xi_m = 1-\sqrt{r_k}$ となる。Gray & Hancock⁽²⁾ によると、 $r_k = 0.5$ としたとき、観測では U/V は $0.20 \sim 0.25$ であるが、 \downarrow ①で与えられる U/V は 0.23 で、数値上よく一致しているが、実はここに Lighthill⁽³⁾ (1975b) が指摘しているように、paradox が含まれている (§4)。

図3は、体のうねり波を $y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt)$ とし、 r_k を固定して、その値を振巾パラメータ $\phi (= \tan^{-1} 2\pi a / \lambda)$ に対して示したもので、破線は r_k を固定したときの最大効率 η_m を与える点を連ねた線である。○印は $\omega = \omega$ セイシに対する観測⁽²⁾、最大効率に近うことがわかる。他方、×印は Taylor のモデル (らせん鞭毛) 実験で、 $r_k > 0.5$ である (0.5 に近い) ことがうかがえる ($\delta / \lambda \leq 0.01$, δ : 鞭毛の断面半径, Hancock⁽⁴⁾ Fig. 8)。②は②に従って計算した。

§ 3. 高レイノルズ数での運動

水中を泳ぐヘビ, またはヒルのように, 体が大きくてレイノルズ数も高いばあいには, 抵抗法則は図1の(b), (c)のようになされよう。図2のような運動のばあい, 断面の直径を d とし,

$$F_N = \frac{1}{2} \rho d C_N V_N^2, \quad F_T = \frac{1}{2} \rho d C_T V_T^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

と仮定すると (図1(c)), 平均的な定常運動の条件 $\bar{p} = 0$ を書くと,

$$0 = \int_0^L \{ F_N \sin \theta - F_T \cos \theta \} ds$$

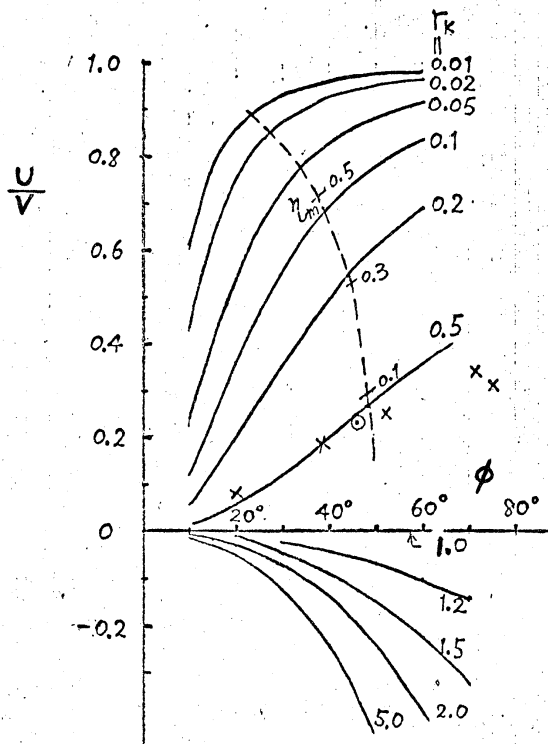


図3. 線型抵抗. $y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$,
 $\phi = \tan^{-1} \frac{2\pi a}{\lambda}$, \odot ウーのセイヤウ, \times Taylorモデル.

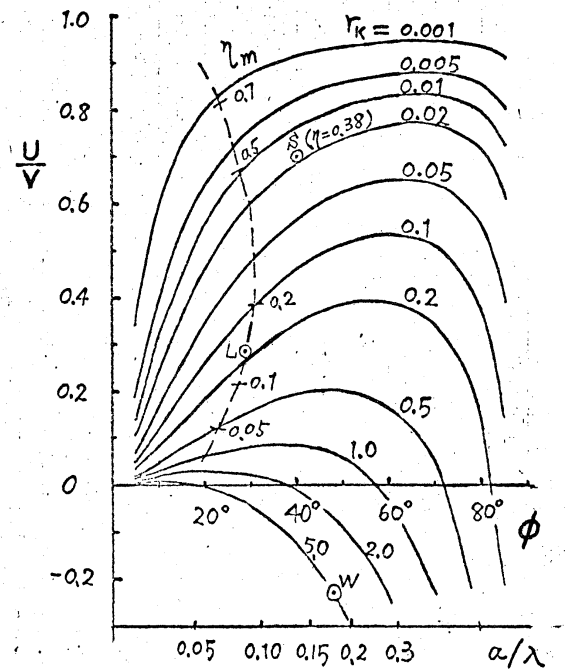


図4. 2乗抵抗. $\delta: \text{ヘビ}$,
 $L: \text{ヒル}$, $W: \text{イカ}$

$$\therefore \frac{1}{r_k} (1-\xi)^2 B_3 - \frac{1}{\alpha^2} A_1 + \frac{2}{\alpha} (1-\xi) A_2 - (1-\xi)^2 A_3 = 0$$

$\therefore \xi = U/V, \quad r_k = C_T/C_N, \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} \theta \, d\theta,$
 $B_3 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta / \cos \theta \, d\theta, \quad y = a \sin z, \quad \tan \theta = \frac{2\pi a}{\lambda} \cos z,$
 $z = (2\pi/\lambda)(x - vt).$ ここで λ は波長の半分だけになっている。 ξ について解けば,

$$\xi = 1 - \frac{1}{\alpha} \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 + A_1(\frac{B_3}{r_k} - A_3)}}{B_3/r_k - A_3} \dots \dots \textcircled{4}$$

を得る。前と同様に, 仕事率 E と gliding の抵抗 D_0 は

$$E = \frac{1}{2} \rho U^3 d C_T \frac{\lambda}{\alpha} \xi^{-3} \left\{ \frac{1}{\alpha^3} - \frac{2}{\alpha} (1-\xi) + (1-\xi)^2 A_2 \right\},$$

$$D_0 = \frac{1}{2} \rho U^2 d C_T \lambda / \alpha.$$

従って, 効率 η は

$$\eta = \frac{D_0 U}{E} = \xi^3 / \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{2}{\alpha} (1-\xi) + (1-\xi)^2 A_2 \right) \dots \textcircled{5}$$

となる。

図4は④から得られる $\xi - \phi$ 図 ($\phi = \tan^{-1} 2\pi a/\lambda$), r_k の値は
 0.001 ~ 5.0 の範囲にわたっている。破線は⑤の与える最大効
 率 η_m の軌跡。Sは $l = 30 \text{ cm}$ の \wedge ビーム ($R \sim 10^5$), Lは 10 cm
 のヒル ($R \sim 10^3$), Wは 10 cm のゴカイ ($R \sim 10^3$)。 \wedge ビームは r_k
 が約 0.02 で C_N が C_T に比べて非常に大きく, ゴカイは逆
 に r_k が約 5 で, C_T の方が大きい。これは外形とも一致する。

Taylor⁽⁵⁾ は図1(b)の層流のばあいについて計算しているが,

接線抵抗については独特の式を使い、どういつわけか純粋に接線運動のときには $F_T = F_N = 0$ となる。乱流になるばあいを計算してあり、そのときの接線抵抗の方は本節と若干異なっている。同じ paper において、ゴカイのような U/V が負となる運動の発見についての興味ある逸話が述べられている。

§ 4. 抵抗係数に関する 'Lighthill の paradox' ! ⁽³⁾

§ 2 で扱われた低レイノルズ数のばあいの抵抗係数は、近似的に解析的手段で評価することが出来る。このときの支配方程式は慣性項を省略した Stokes 方程式で、原点に集中した力 F があるときには

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 u + F \delta(r) = 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

および連続の式 $\nabla \cdot u = 0 \quad \dots \textcircled{7}$

である。ここに u , p は速度および圧力, r は位置ベクトル。これを満たす解は、よく知られているように、Hancock⁽⁴⁾ の呼称によれば Stokeslet である:

$$u_S = \frac{F}{8\pi\mu r} + \frac{1}{8\pi\mu r^3} (F \cdot r) r \quad \dots \textcircled{8}$$

~~とある~~ ($r = |r|$)。また任意のポテンシャル流, $u = \nabla \phi$ ($\Delta \phi = 0$), も、原点を除いて, ⑥, ⑦ を満たす (このとき $p = \text{const}$)。

原点に強さ G の dipole があるときは、その場は

$$u_D = -\frac{G}{4\pi r^3} + \frac{3}{4\pi r^5} (G \cdot r) r \quad \dots\dots ⑨$$

で与えられる。今、長さ $2g$ 、半径 a の円柱を考え、この円柱が粘性流体中をゆっくり運動するときの場は、上記2つの特異解 u_S, u_D をその軸上に分布させることにより表わすことができる。円柱の軸を x 軸に選び、一様な強さの stokeslet $F = (F_x, F_y, 0)$ および dipole $G = (0, -\frac{a^2}{4\mu} F_y, 0)$ が x 軸上の区間 $(-g, +g)$ に分布しているとする (F_x, F_y : 定数)。このときの速度場は重ね合わせにより

$$u(x, y, z) = \int_{-g}^g [u_S(x-x', y, z) + u_D(x-x', y, z)] dx'$$

で表わせ、積分の結果、 $x=0$ の円柱表面上では

$$\begin{aligned} u_T \equiv u_x(x=0, y^2+z^2=a^2) &= \frac{F_x}{8\pi\mu} (4 \ln \frac{2g}{a} - 2) + O(\frac{a^2}{g^2}), \\ u_N \equiv u_y(x=0, y^2+z^2=a^2) &= \frac{F_y}{8\pi\mu} (2 \ln \frac{2g}{a} + 1) + O(\frac{a^2}{g^2}), \\ u_z(\quad \quad \quad) &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} u_T \\ u_N \\ u_z \end{aligned}} \right\} ⑩$$

を得る。円柱にはたらく単位長さ当りの抵抗力は、軸方向に F_x 、直角方向に F_y であって、各方向の抵抗係数は⑩より得ることができる：

$$\text{法線抵抗係数, } K_N = \frac{F_y}{u_N} = \frac{4\pi\mu}{\ln \frac{2g}{a} + \frac{1}{2}}, \quad \dots\dots ⑪$$

接線抵抗係数, $K_T = \frac{F_x}{u_T} = \frac{2\pi\mu}{\ln \frac{24}{a} - \frac{1}{2}} \dots (12)$

円柱に対するこれらの抵抗係数 K_N, K_T を, 波長 λ のうねりを行うべん毛運動に適用するときには, $\phi \ll \lambda$ とするのが合理的であるが, Gray & Hancock⁽²⁾ によると, $u =$ のセイシのばあい, $\phi = \lambda$ としたとき

$$r_k = \frac{K_T}{K_N} \approx 0.6 \left(\frac{\lambda}{a} = \frac{24\mu}{0.2\mu} \doteq 120 \right)$$

となって, 測定とよく一致する。

ところが Lighthill [1975a, Chap.3] によると, うねり波の振巾が小さくて stokeslet の強さが e^{ikx} のように周期的に変化するばあいには, $\phi \approx 0.09\lambda (= \bar{e}^x/k; k=2\pi/\lambda, x=0.577)$ とするのが適当であることがわかる。しかしながら, この値では $r_k \approx 0.7$ となってしまう, 観測からはかえり, 2すれてしまう。

他方, Lighthill⁽³⁾ [1975b] はこの点に特別の注意をはらいながら, ベん毛運動を数学的・流体力学的 (生物学的にも) に survey している。らせん鞭毛運動の解析の結果もやはり, $\phi/\lambda \doteq 0.09$ (λ はらせんに沿う波長) とするのが適当であることが結論される。更に, 上記の paradox は, 抵抗係数 K_T の導出法に問題があることが発見されて, 解明されることか

わかった。つまり、 K_N の式⑪の分母の $+\frac{1}{2}$ は、法線 stokeslet F_y に伴う法線 dipole G_y に由来するが、他方接線方向には dipole G_x はゼロとしてあるから、 K_T の式⑫の分母の $-\frac{1}{2}$ は他に由来する。Stokeslet は long-range の場であるから ($u_s \propto \frac{1}{r}$, $r \rightarrow \infty$)、遠方で振動している stokeslet の場を省略できない。それを省略した結果現われたのが、 K_T の $-\frac{1}{2}$ であり、遠方の振動場を考慮すると、 $-\frac{1}{2}$ 項は K_T から消える。実際、らせん運動について、Hancock によるもっと正確な速度表式を使うと、

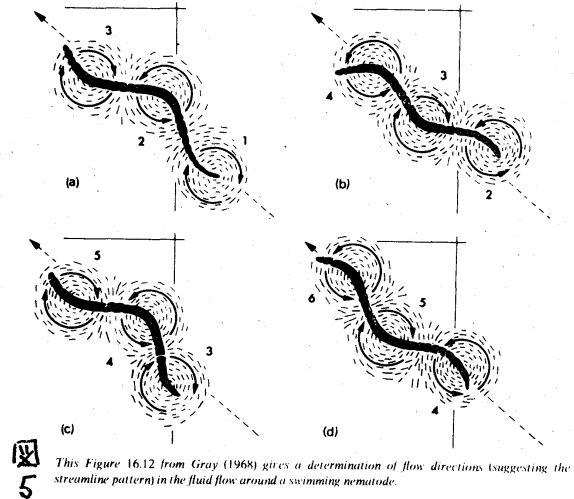
$$K_N = \frac{4\pi\mu}{\ln \frac{2g}{a} + \frac{1}{2}}, \quad K_T = \frac{2\pi\mu}{\ln \frac{2g}{a}}, \quad g = 0.09\lambda$$

とするのがより妥当な式であることがわかる。 $\lambda/a = 120$ とすると、 $r_K = 0.58$ となり、観測に非常に近い数値が得られる。

$g = 0.09\lambda$ という長さは、'影響半径' ないしは '流れ場のスケール' とみることが出来る。これは体のうねり波の波長に比べるとかなり小さく、影響が局所的であることになる。図5は運動中の線虫 (nematode, $R \sim 1$) のまわりの流線模様を示すが、⁽⁶⁾ 局所場であることがうかがえる。半波長毎に体に付着した渦運動が見られる。しかし高レイノルズ数での運動との違いは、際立った後流が見られないことである。⁽⁶⁾

以上で考察してきたのは、主に大きな頭部をもたない動物のばあいであるが、定常的な推進のとき、そのばあい、うねり運動による合力の平均はゼロである。頭があると、合力の平均は、頭部の抵抗 D_h

に見合うゼロでない値をとらねばならない。このようなときの影響半径は、らせん鞭毛運動のばあい、 $\lambda/6$ でスケールが大きくなる。⁽³⁾



This Figure 16.12 from Gray (1968) gives a determination of flow directions (suggesting the streamline pattern) in the fluid flow around a swimming nematode.

参考文献

- (1) Lighthill, Sir James 1975a Mathematical Biofluidynamics,
- (2) Gray, J. & Hancock, G. J. 1955 J. Exptl. Biol. 32 802-814.
- (3) Lighthill, Sir James 1975b Flagellar Hydrodynamics.
- (4) Hancock, G. J. 1953 Proc. Roy. Soc. A 217 96-121.
- (5) Taylor, G. I. 1952 Proc. Roy. Soc. A 214 158-183.
- (6) Gray, James 1968 Animal Locomotion (Weidenfeld & Nicolson, London).